

$$\begin{cases} n = \text{et} \\ P \cap Q \\ P \times Q \end{cases} ; \begin{cases} u = \text{ou} \\ P \cup Q \\ P + Q \end{cases}$$

$$P \Rightarrow Q \quad \vec{0} \quad \vec{P} \text{ ou } Q$$

P	Q
1	1
0	0
1	0
0	1

la négation dans propositions

$$\begin{aligned} & \neg \neg P \Leftrightarrow P \\ & \neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \\ & \neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \\ & \neg (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \end{aligned}$$

A : Inter

U : Union

$A, B \Rightarrow$ A و B متجانسان

A/B : A مع B المتجانسين

B/A : B مع A المتجانسين

C_{IR}^A : A مع IR المتجانسين

C_{IR}^B : B مع IR المتجانسين

$(\neg P) \text{ ou } Q \Leftrightarrow P \Rightarrow Q$

$P \Leftrightarrow Q$ et l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$

car la négation \neg et la négation \neg

contraposée : $\neg Q \Rightarrow \neg P$

$P \Rightarrow Q$ est équivalente $\neg (P \wedge \neg Q)$

$$ax^2 + bx + c : \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta < 0 : \text{pas de racine réelle}$$

$$\Delta = 0 : x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta > 0 : x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$d(a) = \{n \in R, nRa\}$$

injective : $\forall n_1, n_2 \in E (f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2)$

surjective : $\forall y \in F \exists n \in E (y = f(n))$

bijjective : $\forall y \in F \exists ! n \in E (y = f(n))$

relation d'équivalence :

reflexive : $\forall n \in E, nRn$

symétrique : $\forall n, y \in E, nRy \Rightarrow yRn$

transitive : $\forall n, y, z \in E, (nRy \wedge yRz) \Rightarrow nRz$

Application réciproque : f^{-1}

$$f : R^+ \rightarrow R$$

$$y = \ln x \Rightarrow f^{-1}(y) = e^y$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\sin(x_1) - \sin(x_2) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 0$$

Relation d'ordre :

réflexive : $\forall n \in E, n R n$

antisymétrique : $\forall n, j \in E, (n R j \text{ et } j R n)$
alors $n = j$

transitive : $\forall n, y, z \in E (n R y \text{ et } y R z)$
alors $n R z$

$$\text{Ex } p(n) : \forall n, y \in \mathbb{R} \quad n \neq y \Rightarrow 3n + 2 \neq 3y + 2$$

$$3n + 2 = 3y + 2 \Rightarrow n = y \text{ c'est le contraire}$$

Prouver par récurrence ? 2.5.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.30.32.34.36.38.40.42.44.46.48.50.52.54.56.58.60.62.64.66.68.70.72.74.76.78.80.82.84.86.88.90.92.94.96.98.100

1) Initialisation : on montre que $P(0)$ est vrai

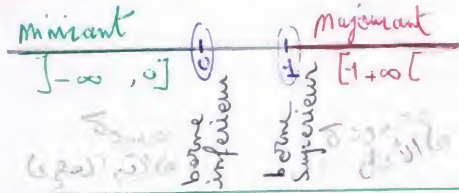
2) hérédité : on suppose que $P(n)$ est vrai
et on montre que $P(n+1)$ est vrai

⋮

conclusion : par récurrence on a
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^2 > n$

tautologie est une proposition qui est
vrai dans tous les cas.

Majorant et minorant :
 Maximum $A = 1 \notin A$ n'existe pas
 Soit $A = [0, 1[$ minimum $A = 0 \in A$ existe



monotone : متزايدة أو متناقص

- * f est croissante : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
 et elle strictement croissante si au lieu de \leq on a $<$
- * f est décroissante : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
 et strictement décroissante si $>$

fonction paire $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

fonction impaire $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

la limite d'une fonction en point

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

pour montrer que fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$

et admet elle une solution (المعادلة)

le prolongement par continuité : $f(a) \cdot f(b) < 0$ ou $f(c) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

la dérivée en point existe

Dérivée en point : (الاشتقاق في نقطة)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ex: $f(x) = x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Théorème de Rolle : (نظرية رول)

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :
- f est continue sur $[a, b]$
 - f est dérivable sur $]a, b[$
 - $f(a) = f(b)$
- Alors il existe $c \in]a, b[$ que $f'(c) = 0$

Théorème des accroissements finis :
 continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
 il existe $c \in]a, b[$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Théorème de l'Hopital :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

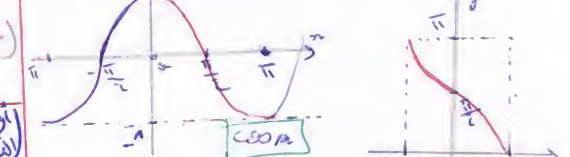
$$\begin{matrix} +\infty & -\infty & \frac{0}{0} \\ 0 & \times & \infty \end{matrix} \left| \frac{0}{0} \right. \quad \text{محدد غير محدد}$$

Fonctions usuelles :

Fonctions circulaires inverses :

Arc cosinus : $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

$y = \arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$



$$\text{Arc cos}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \forall x \in]-1, 1[$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

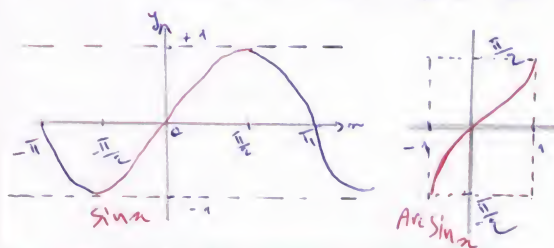
$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\cos x = y \Rightarrow x = \arccos y$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \left\{ \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \right.$$

2/ Arccosinus $\sin(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [-1, 1]$

$$\text{Arcsin}[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



$$\text{Arcsin } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in]-1, 1[$$

$$\sin(\text{arcsin}(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

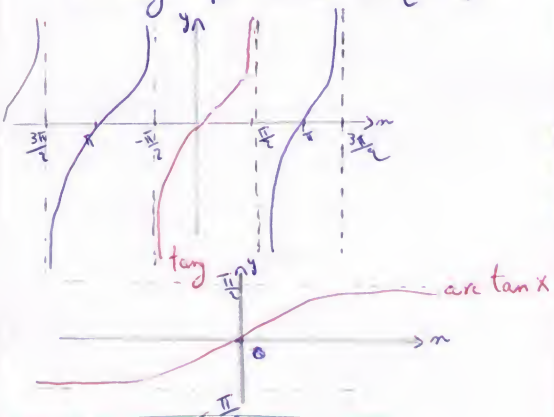
$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{Si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \sin(x) = y \Rightarrow x = \text{Arcsin } y$$

2/ Arctangente

$$\tan]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Arctan } \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



$$\text{Arctan}(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Arctan}(\tan(x)) = x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Si } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \tan(x) = y \Rightarrow x = \text{Arctan } y$$

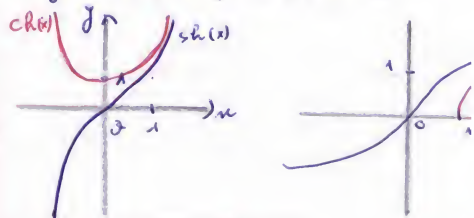
3/ Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

A/ cosinus hyperbolique et son inverse:

$$\text{cosinus hyperbolique } \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$\text{ch}:]0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ est une f

$$\text{Arg ch}: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$$



$$(\text{Arg ch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{ch et sh est}$$

B/ sinus hyperbolique et son inverse

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\text{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement croissante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh } x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh } x = +\infty$$

dérive une bijection.

$$\text{Arg sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Proposition: $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$

$$\text{ch}' x = \text{sh } x \quad \text{et} \quad \text{sh}' x = \text{ch}(x)$$

* $\text{Arg sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et cont

$$\text{Arg sh est dérivable et } \text{Arg sh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

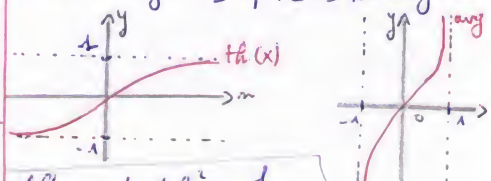
$$\text{Arg sh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

C/ Tangente hyperbolique et son inverse:

$$\text{tangente hyperbolique } \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$$

la fonction $\text{th}: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est une bijection

on note $\text{argth}:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sa bijection



$$\text{th}' x = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$$

$$\text{argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

th et argth sont i

serieux !

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad / \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \right\} \quad \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0 \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \right\} \quad \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \right\}$$

Pour montrer f est continue

$$\text{en } 0: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f'(0) = l$$

$$-1 \left(\sin \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} \right)$$

fonction f périodique

$$f(x+T) = f(x)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

Dérivable en x_0

f n'est pas continue en point x_0 ~~si~~ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$
alors elle n'est pas dérivable en x_0

D' / Trigonométrie hyperbolique :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{ch}(2a) = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$$

$$\arg \operatorname{ch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1$$

$$\arg \operatorname{sh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

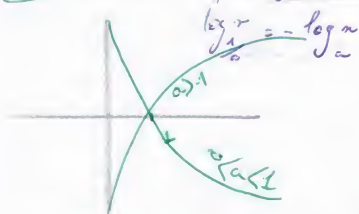
$$\arg \operatorname{th}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (-1 < x < 1)$$

logarithme de base a :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

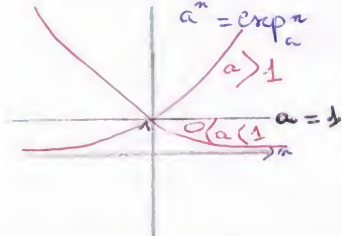


Exponentielle de base a :

$$\exp_a x = e^{x \ln a}$$

$$\exp_a(0) = 1$$

$$e^{a \ln x} \cdot e^{b \ln x} = \exp_a x$$



Pour montrer f est continue en x_0

$$\text{fait : } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

donc f est continue.

classe C^1 : (x_0)

$$f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

(continue, dérivable, etc.)

$$f \text{ de classe } C^2 \Rightarrow \begin{cases} (1) f \text{ continue et dérivable} \\ (2) f' \text{ continue et dérivable} \\ (3) f'' \text{ continue} \end{cases}$$

rep. 1) classe C^1 :

{ la fonction f est continue

$$f'(x)$$

{ $f'(x)$ est continue en tout point

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

$$x \rightarrow x_0$$

Théorème des accroissements finis
général :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$g(b) - g(a) = f'(c)$$

[XPRK 0]

1) Formule de Taylor-Lagrange :

Soit f admettre C^{n+1} sur $[a, b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors il existe une valeur ξ de $]a, b[$ telle que :

$$f(b) = \sum_{p=0}^n \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$= f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \text{Rest}$$

cette formule est connue par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n .

2) Formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{p=0}^n \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(x)$$

Rest et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

$$= f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(x)$$

Rest et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

3) Formule de Maclaurin :

c'est la formule de Taylor-Lagrange avec $b=x$, $a=0$ et $\xi=c$ avec $0 < c < 1$

$$f(x) = \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

avec $0 < c < 1$